Décomposition Polaire

Théorème : L'application suivante est un homéomorphisme

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O,S) & \longmapsto & OS \end{array}.$$

Preuve : On commence par deux remarques :

- L'application est bien définie car si $x \in \mathbb{R}^n$ et $(O,S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$,

$$OSx = 0 \Rightarrow Sx = 0 \Rightarrow^t xSx = 0,$$

  donc le noyau de OS est trivial ie OS est inversible.

- La multiplication est continue dans $GL_n(\mathbb{R})$ donc φ est continue.

Surjectivité :
Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.
On a ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. En effet, elle est clairement symétrique et si $x \in \mathbb{R}^n$, ${}^tx({}^tMM)x = ||Mx||_2 > 0$ si $x \neq 0$.
Avec le théorème spectral on peut alors se donner $p \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tMM = P\Delta P^{-1}$ où $\Delta = \text{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.
On pose alors $S = P\Delta' P^{-1}$ où $\Delta' = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$. Il n'y a pas de soucis car on peut montrer que les valeurs propres sont strictement positives. De plus $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car ${}^tP = P^{-1}$.
On a alors $S^2 =^t MM$ donc en posant $O = MS^{-1}$ on a ${}^tOO = Id$, d'où $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Comme $OS = M$, on a la surjectivité.

Injectivité :
On suppose que $M = OS = O'S'$.
On pose alors $A = OO'^{-1} = S^{-1}S'$. On voit alors que A est à la fois dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi on sait que ${}^tA = A$ et ${}^tA = A^{-1}$ donc $A = A^{-1}$. Comme $X^2 - 1$ annule A on sait que le spectre de A est inclus dans $\{-1, 1\}$. Mais on sait que Sp(A) est inclus dans $\mathbb{R}^+$ donc la seule valeur propre de A est 1 ie $A = Id$ (c'est la seule matrice semblable à l'identité). Ainsi, $O = O'$ et $S = S'$.

Montrons que la réciproque est continue :
On le montre par caractérisation séquentielle. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $M \in G$. Pour tout n on note O_n et S_n la décomposition polaire de M_n et O, S celle de M. Montrons alors que $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers O et S.
Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact on peut extraire une sous-suite convergente qui converge vers un élément $\overline{O}$, qui est dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car c'est un fermé. Notons ψ l'extractrice associée. Il suit alors que $(S_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{S} = \overline{O}^{-1}M$. De plus, $\overline{S} \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = GL_n(\mathbb{R}) \cap \overline{\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Par unicité de la décomposition polaire il vient alors que $\overline{S} = S$ et $\overline{O} = O$. $\square$

Corollaire : Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $||A||_2 = \sqrt{\rho(^tAA)}$ où ρ désigne le rayon spectral.

Preuve : Soit $A = OS$ sa décomposition polaire. Comme $||OS(x)||_2 = ||Sx||_2$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ (car $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des isométries), on a $|||A||| = |||S|||$. Comme S est symétrique réelle on peut la diagonaliser dans une base orthonormale $(v_1, ..., v_n)$ par le théorème spectral de sortes que ses valeurs propres soit rangées par ordre décroissant selon le module, $|\lambda_1| \geq ... \geq |\lambda_n|$. Si x est de norme 1 on écrit $x = \sum \lambda_i v_i$ et on trouve, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$||S(x)||_2 \leq |\lambda_1|.$$

De plus, la borne est atteinte pour $x = v_1$ et ainsi on a $||A||_2 = \rho(S) = \sqrt{\lambda_1^2} = \sqrt{\rho(^tAA)}$ comme $S^2 = A$. $\square$

Pré-requis importants : Il faut être à l'aise sur

- Les propriétés des éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
- Les différentes caractérisation de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ avec les valeurs propres
- Avoir réfléchi à la compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$